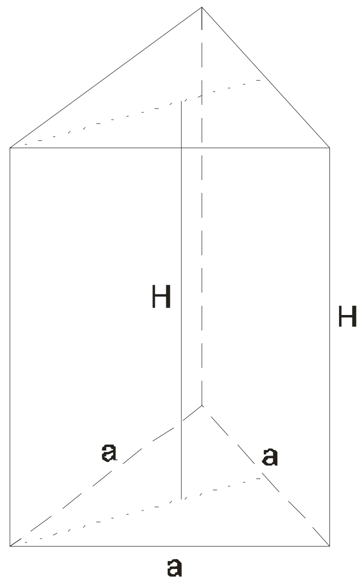
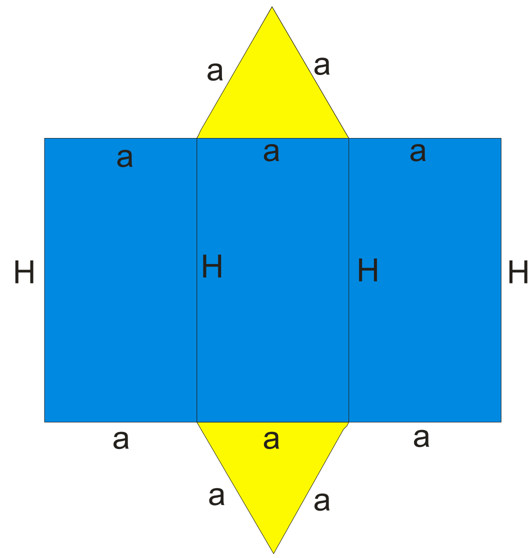
4. UČENIK VLADA POJMOVIMA PRIZMA I PIRAMIDA, RAČUNA NJIHOVU POVRŠINU I ZAPREMINU KADA SU NEOPHODNI ELEMENTI NEPOSREDNO DATI U ZADATKU

PRAVA PRAVILNA TROSTRANA PRIZMA





mreža

$$B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$ je površina osnove(baze)

$$M = 3aH$$ je površina omotača

$$P = 2B + M$$

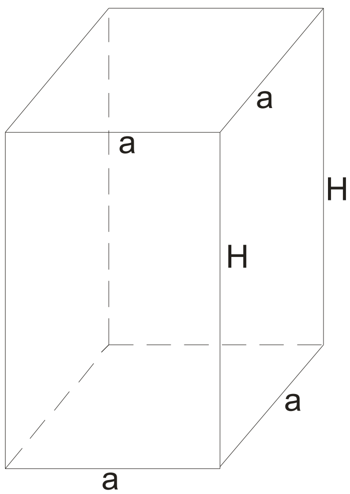
$$P = 2\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3aH$$

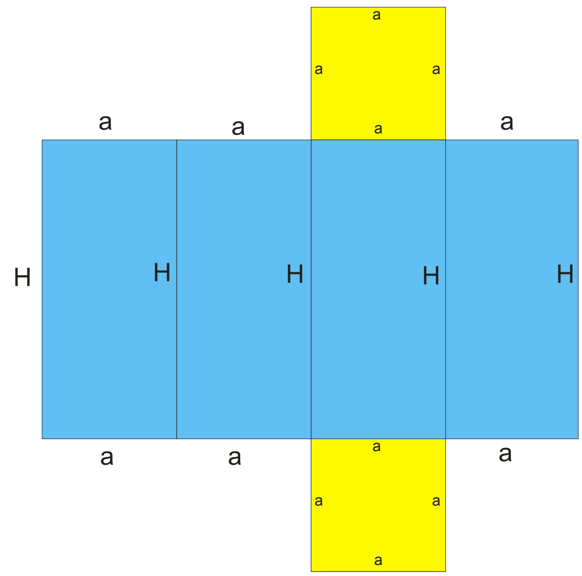
$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3aH$$

$$V = B \cdot H$$

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H$$

PRAVA PRAVILNA ČETVOROSTRANA PRIZMA

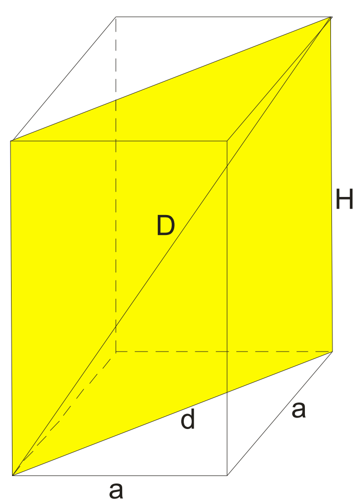




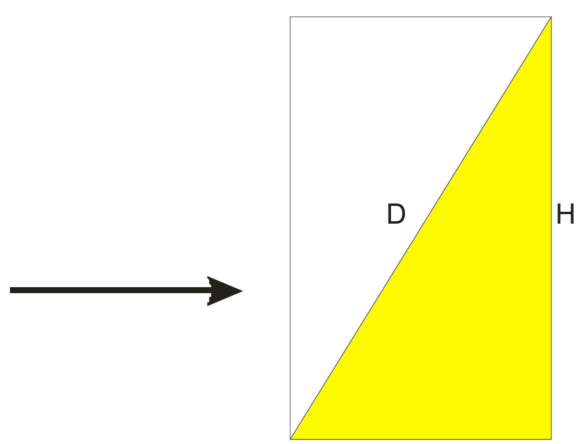
Površina baze i površina omotača su: $B = a^2$ $\qquad$ $M = 4aH$

$$P = 2B + M \qquad\qquad V = B \cdot H$$

$$P = 2a^2 + 4aH \qquad\qquad V = a^2 \cdot H$$



dijagonalni presek



$d = a\sqrt{2}$

dijagonalni presek

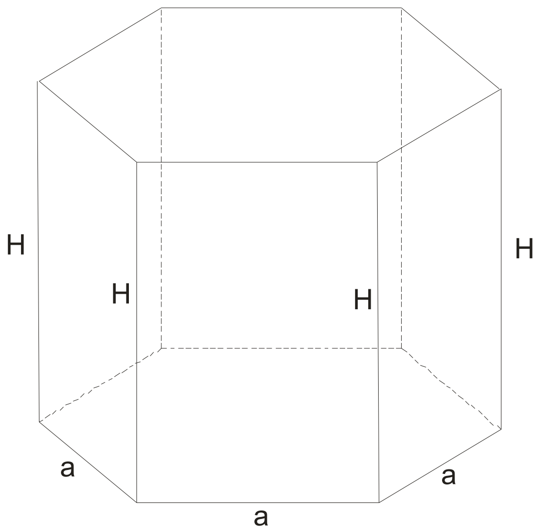
$D^2 = (a\sqrt{2})^2 + H^2$

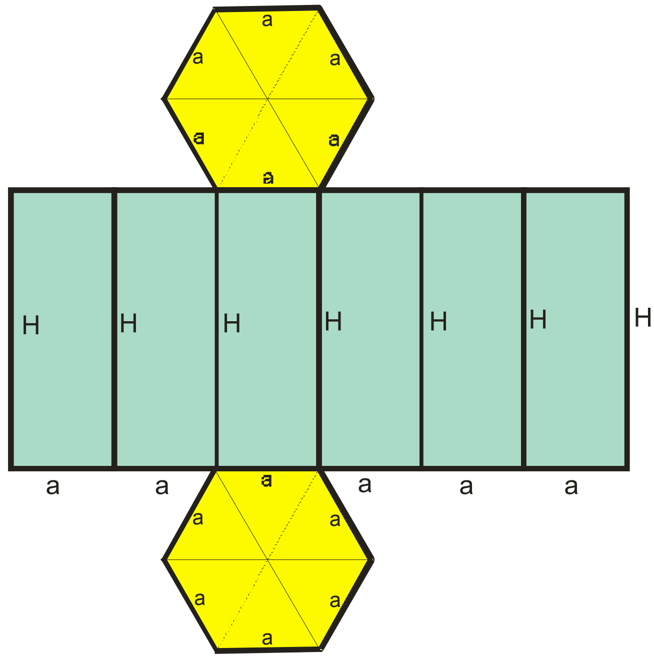
Površina dijagonalnog preseka se izračunava:

$$P = d \cdot H$$

$$P = aH\sqrt{2}$$

PRAVA PRAVILNA ŠESTOSTRANA PRIZMA





Površina baze i omotača su:

$$B = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \qquad M = 6aH$$

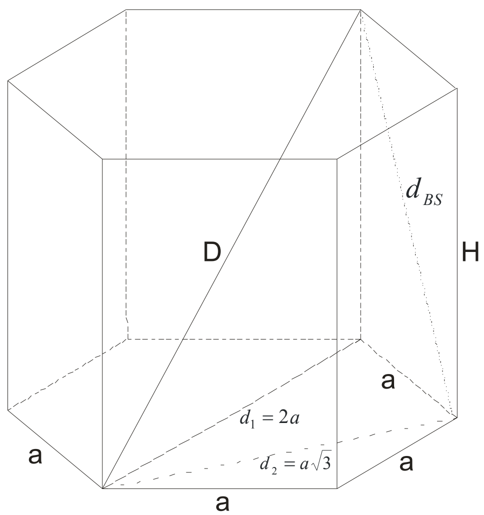
Površina i zapremina cele takve prizme je:

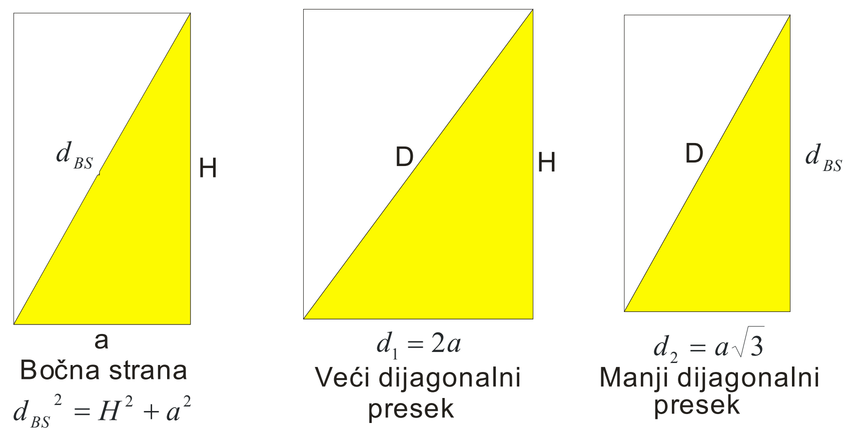
$$P = 2B + M \qquad V = B \cdot H$$

$$P = 2 \cdot 3 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 6aH \qquad V = 3 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot H$$

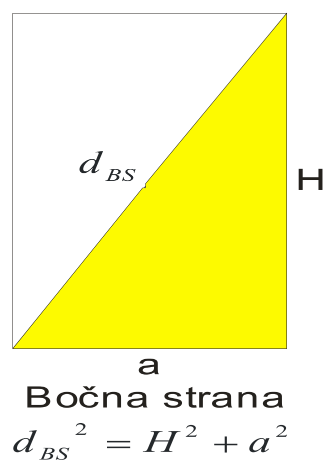
$$P = 3a^2\sqrt{3} + 6aH \qquad V = \frac{3a^2H\sqrt{3}}{2}$$

Što se tiče primene Pitagorine teoreme, imamo sledeće situacije:





Još samo da vam napomenemo da primena Pitagorine teoreme na bočnu stranu :



važi kod svake od navedenih pravilnih prizmi!

PIRAMIDE

Slično kao i kod prizme i ovde ćemo najpre objasniti oznake ...

- sa **a** obeležavamo dužinu osnovne ivice

- sa **H** obeležavamo dužinu visine piramide

- sa **h** obeležavamo dužinu visine bočne strane (**apotema**)

- sa **s** obeležavamo dužinu bočne ivice (**izvodnica**)

- sa **B** obeležavamo površinu osnove (baze)

- sa **M** obeležavamo površinu omotača

- omotač se sastoji od **bočnih strana** (najčešće jednakokraki trouglovi) , naravno trostrana piramida u omotaču ima 3 takve strane, četvorostrana - 4 itd.

- ako u tekstu zadatka kaže **jednakoivična** piramida, to nam govori da su osnovna ivica i bočna ivica jednake , to jest : **a = s**

- ako u tekstu zadatka ima reč **prava** – to znači da je visina piramide normalna na ravan osnove ili ti , jednostavnije rečeno , piramida nije kriva

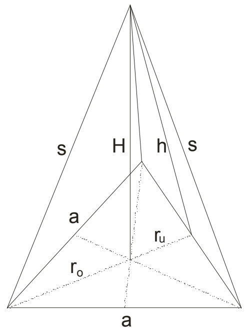
- ako u tekstu zadatka ima reč **pravilna** , to nam govori da je u osnovi (bazi) pravilan mnogougao: jednakostraničan trougao, kvadrat, itd.

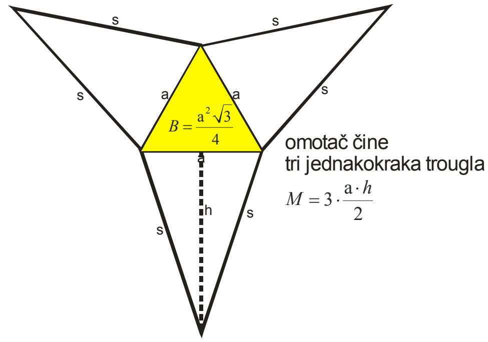
Dve najvažnije formule za izračunavanje površine i zapremine su:

$$P = B + M \quad \text{za površinu i}$$

$$V = \frac{1}{3}\,\mathrm{B} \cdot \mathrm{H} \quad \text{za zapreminu}$$

PRAVA PRAVILNA TROSTRANA PIRAMIDA





U omotaču se nalaze tri jednakokraka trougla (površina jednog od njih je $P_{bočne\ strane} = \frac{a \cdot h}{2}$) , a kako ih ima 3 u omotaču, to je: $M = 3\frac{a \cdot h}{2}$

Formule za **površinu i zapreminu** će biti:

$$P = B + M$$

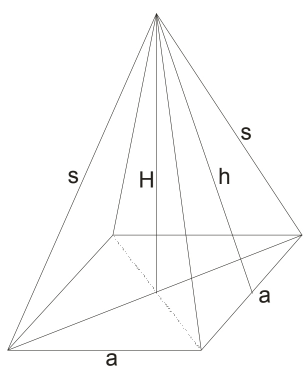
$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3\frac{a \cdot h}{2}$$

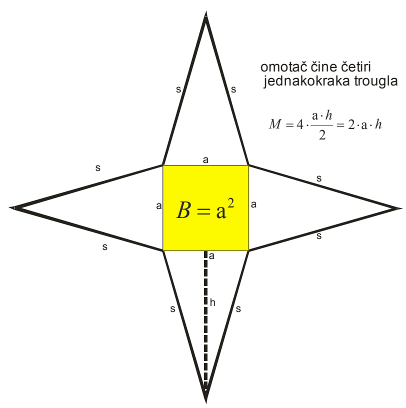
$$V = \frac{1}{3}B \cdot H$$

$$V = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H$$

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{12} \cdot H$$

PRAVA PRAVILNA ČETVOROSTRANA PIRAMIDA





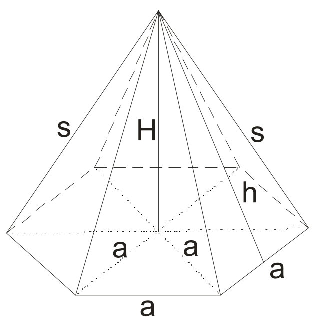
Površine baze i omotača su dakle:

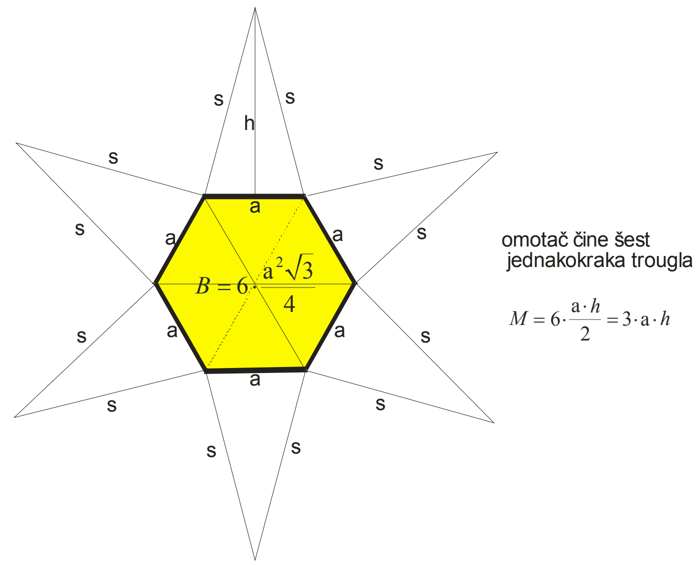
$B = a^2$ i $M = 4\frac{a \cdot h}{2}$ odnosno $M = 2ah$

A površina i zapremina cele piramide su:

$$P = B + M \qquad V = \frac{1}{3}B \cdot H$$

$$P = a^2 + 2ah \qquad V = \frac{1}{3}a^2 \cdot H$$





Površine baze i omotača su dakle:

$$B = 6\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3\frac{a^2\sqrt{3}}{2} \qquad M = 6\frac{ah}{2} = 3ah$$

A površina i zapremina cele piramide su:

$$P = B + M$$

$$P = 3\frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3ah$$

$$V = \frac{1}{3}BH$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 3\frac{a^2\sqrt{3}}{2}H$$

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}H$$

U ovom delu se ne traži od nas da tražimo nepoznate elemente bilo prizme ili piramide,

pa ćemo upotrebu pitagorine teoreme objasniti u naprednom nivou.

Evo nekoliko primera iz zbirke za pripremu male mature iz 2012. godine.

181. Колика је површина правилне тростране призме чија је основна ивица дужине 4 cm и висина призме је 2 cm?

Прикажи поступак.

Површина призме је ______ cm².

Rešenje:

$a = 4cm$

$\underline{H = 2cm}$

$P = ?$

$P = 2B + M$

$P = 2\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3aH$

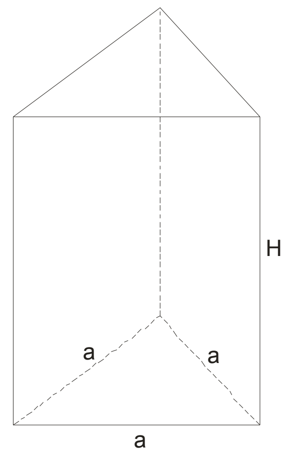
$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3aH$

$P = \frac{4^2\sqrt{3}}{2} + 3\cdot 4\cdot 2$

$P = \frac{\cancel{16}\sqrt{3}}{\cancel{2}} + 24$

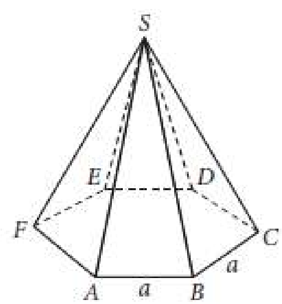
$P = 8\sqrt{3} + 24$

$\boxed{P = 8(\sqrt{3}+3)cm^2}$



Površina prizme je $8(\sqrt{3}+3)cm^2$

182. Колика је запремина правилне шестостране пирамиде чија је основна ивица 3 cm и висина пирамиде $3\sqrt{3}$ cm? Прикажи поступак.



Запремина пирамиде је ____cm³.

Rešenje:

$a = 3cm$

$\underline{H = 3\sqrt{3}cm}$

$V = ?$

$V = \frac{1}{3}\cdot 6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}H \rightarrow V = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}H$

$V = \frac{3^2\boxed{\sqrt{3}}}{2}3\boxed{\sqrt{3}} = \frac{9\boxed{\sqrt{3}^2}}{2}3 = \frac{27\cdot 3}{2}$

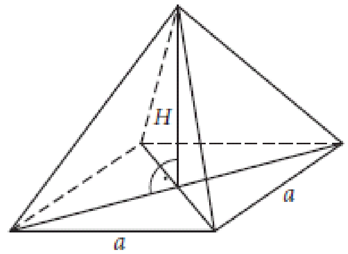
$\boxed{V = 40,5cm^3}$

Zapremina piramide je $40,5cm^3$**.**

183. Колика је површина правилне једнакоивичне четворостране пирамиде чија је ивица $a = 6$ cm?

Прикажи поступак.

Површина пирамиде је ____ cm².



Rešenje:

Pošto je piramida jednakoivična, to jest a = s, zaključujemo da se omotač sastoji od 4 jednakostranična trougla.

$$P = B + M$$

$$P = a^2 + \cancel{4} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{\cancel{4}}$$

$$P = a^2 + a^2\sqrt{3}$$

$$P = a^2(1+\sqrt{3})$$

$$P = 6^2(1+\sqrt{3})$$

$$\boxed{P = 36(1+\sqrt{3})cm^2}$$

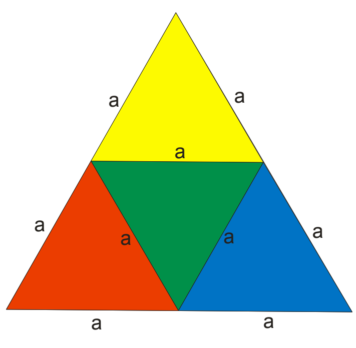
Površina piramide je: $36(1+\sqrt{3})cm^2$

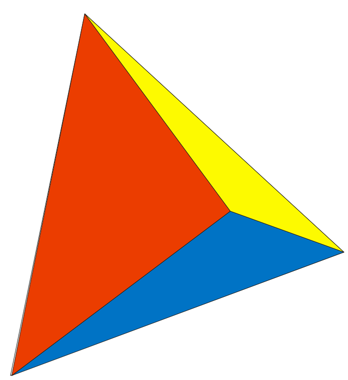
185. Ивица правилне тростране једнакоивичне пирамиде је 8 cm. Колика је њена површина?

Прикажи поступак.

Површина пирамиде је _______ cm².

Rešenje:





Površina se sastoji od površine 4 jednakostranična trougla.

$$P = \cancel{4} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{\cancel{4}}$$

$$P = a^2\sqrt{3}$$

$$P = 8^2\sqrt{3}$$

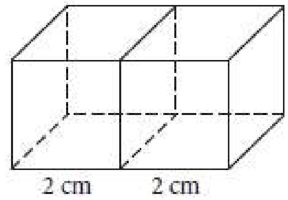
$$\boxed{P = 64\sqrt{3}cm^2}$$

Površina piramide je $64\sqrt{3}cm^2$

184. Ивица коцке је 2 cm. Колика је површина квадра који је направљен од две такве коцке?

Прикажи поступак.

Површина квадра је ____ cm².



Rešenje:

Možemo ići na formulu za površinu kvadra , gde je a = 4 cm, b= 2cm i c= 2cm.

Medjutim, lakše je ako zaključimo da se površina sastoji od 10 površina kvadrata stranice a = 2cm.

$P = 10a^2$

$P = 10 \cdot 2^2$

$P = 10 \cdot 4$

$\boxed{P = 40cm^2}$

Površina kvadra je $40cm^2$